International Mathematical Olympiad
Hong Kong Preliminary Selection Contest 2008

國際數學奧林匹克
香港選拔賽初賽 2008

1st June 2008

2008 年 6 月 1 日

Time allowed: 3 hours

時限：3 小時

Instructions to Candidates:

考生須知：

1. Answer ALL questions.
   本卷各題全答。

2. Put your answers on the answer sheet.
   請將答案寫在答題紙上。

3. The use of calculators is NOT allowed.
   不可使用計算機。

1. If x and y are real numbers such that $\frac{x+22}{y}+\frac{290}{xy}=\frac{26-y}{x}$, find xy. (1 mark)

若實數 x、y 滿足 $\frac{x+22}{y}+\frac{290}{xy}=\frac{26-y}{x}$，求 xy。（1 分）

2. Let a, b, c be pairwise distinct positive integers such that $a+b$, $b+c$ and $c+a$ are all square numbers. Find the smallest possible value of $a+b+c$. (1 mark)

設 a、b、c 爲互不相同的正整數，使得 $a+b$ 、$b+c$ 和 $c+a$ 均爲平方數。求 $a+b+c$ 的最小可能值。（1 分）

3. In a mathematics competition there are four problems, carrying 1, 2, 3 and 4 marks respectively. For each question, full score is awarded if the answer is correct; otherwise 0 mark will be given. The total score obtained by a contestant is multiplied by a time bonus of 4, 3, 2 or 1 according to the time taken to solve the problems, and a further bonus score of 20 will be added after multiplying by the time bonus if one gets all four problems correct. How many different final scores are possible? (1 mark)

某數學競賽有四道題，分別值 1、2、3、4 分。每題答對可得該題全部分數，否則該題得 0 分。另根據答題所需時間，參賽者的總分會乘以時間獎勵 4、3、2 或 1。如果四題全對，更可在乘以時間獎勵分後再加 20 分。那麼最終得分有多少個不同的可能值？（1 分）

4. Let $\overline{ab}$ denote a two-digit number with tens digit a and unit digit b. Find a two-digit number $\overline{xy}$ satisfying $\overline{xy}=(x-y)!\left(\overline{yx}-3\right)$. (1 mark)

設 $\overline{ab}$ 表示十位爲 a 及個位爲 b 的兩位數。求滿足 $\overline{xy}=(x-y)!\left(\overline{yx}-3\right)$ 的兩位數 $\overline{xy}$。（1 分）

5. A parallelogram has its diagonals making an angle of 60° with each other. If two of its sides have lengths 6 and 8, find the area of the parallelogram. (1 mark)

某平行四邊形的兩條對角線成 60°，且其中兩邊的邊長爲 6 和 8。求該平行四邊形的面積。（1 分）

6. Let x and y be non-negative integers such that $69x+54y\leq 2008$. Find the greatest possible value of xy. (1 mark)

設 x、y 爲滿足 $69x+54y\leq 2008$ 的非負整數。求 xy 的最大可能值。（1 分）

7. If n is a positive integer such that n^6+206 is divisible by n^2+2, find the sum of all possible values of n. (1 mark)

若 n 是正整數，且 n^6+206 可被 n^2+2 整除，求 n 所有可能值之和。（1 分）

8. Given that $n!$, in decimal notation, has exactly 57 ending zeros, find the sum of all possible values of n. (1 mark)

已知 $n!$ 以十進制表示時，末尾有剛好 57 個零。求 n 所有可能值之和。（1 分）

9. In ΔABC, D is a point on BC such that AD bisects $\angle BAC$. If $AC = 2$, $BD = 2$ and $DC = 1$, find $\cos \angle ABC$. (1 mark)

在 ΔABC 中，D 是 BC 上的一點，使得 AD 平分 $\angle BAC$。若 $AC = 2$、$BD = 2$ 而 $DC = 1$，求 $\cos \angle ABC$。（1 分）

10. The recurring decimal $0.\dot{x}y\dot{z}$, where x, y, z denote digits between 0 and 9 inclusive, is converted to a fraction in lowest term. How many different possible values may the numerator take? (1 mark)

若把循環小數 $0.\dot{x}y\dot{z}$（其中 x、y、z 代表 0 至 9 之間的數字，包括 0 和 9）化成最簡分數，分子有多少個不同的可能值？（1 分）

11. In a drawer there are x white gloves and y red gloves with $x > y$ and $x + y \leq 2008$. When two gloves are drawn at random, the probability that the two gloves are of the same colour is exactly one-half. Find the largest possible value of x. (2 marks)

一個抽屜裡有 x 隻白色手套和 y 隻紅色手套，其中 $x > y$ 而 $x + y \leq 2008$。當隨意抽出兩隻手套時，兩隻手套顏色相同的概率剛好是二分之一。求 x 的最大可能值。（2 分）

12. In ΔABC, $AB = 2$, $BC = \sqrt{3}$ and $\angle ABC = 150°$. P is a point on the plane such that $\angle APB = 45°$ and $\angle BPC = 120°$. Find BP. (2 marks)

在 ΔABC 中，$AB = 2$、$BC = \sqrt{3}$ 而 $\angle ABC = 150°$。P 是平面上的一點，使得 $\angle APB = 45°$ 而 $\angle BPC = 120°$。求 BP。（2 分）

13. On the coordinate plane, set $A = (-1, 0)$, $B = (1, 0)$ and $P = (0, t)$ where $0 \leq t \leq 1$. As t varies, C is a variable point such that P is the circumcentre of ΔABC. Points which are possible positions of C are coloured red. Find the total area of the red region. (2 marks)

在坐標平面上，設 $A = (-1, 0)$、$B = (1, 0)$ 及 $P = (0, t)$，其中 $0 \leq t \leq 1$。當 t 變化時，C 是一動點，使得 P 是 ΔABC 的外心。現把 C 點的所有可能位置均塗上紅色。求紅色區域的總面積。（2 分）

14. Find the infinite sum of $\frac{1^3}{3^1} + \frac{2^3}{3^2} + \frac{3^3}{3^3} + \frac{4^3}{3^4} + \cdots$. (2 marks)

求 $\frac{1^3}{3^1} + \frac{2^3}{3^2} + \frac{3^3}{3^3} + \frac{4^3}{3^4} + \cdots$ 無限項之和。（2 分）

15. Let L denote the L.C.M. of 1, 2, …, 20. How many positive factors of L are divisible by exactly 18 of the 20 numbers 1, 2, …, 20? (2 marks)

設 L 爲 1、2、…、20 的最小公倍數。那麼 L 有多少個正因數可被 1、2、…、20 這 20 個數當中的剛好 18 個整除？（2 分）

16. ΔABC is equilateral with side length 2. O is a point inside ΔABC, and P, Q, R are points on the plane such that OAP, OBQ and OCR are all isosceles triangles (with vertices named in clockwise order) with vertical angles $\angle OAP$, $\angle OBQ$ and $\angle OCR$ equal to 15°. Find the area of ΔPQR. (2 marks)

ABC 是等邊三角形，邊長爲 2。O 是 ΔABC 內的一點，而 P、Q、R 則爲平面上的三點，使得 OAP、OBQ 和 OCR 均爲等腰三角形（頂點均按順時針次序列出），且它們的頂角 $\angle OAP$、$\angle OBQ$ 和 $\angle OCR$ 均等於 15°。求 ΔPQR 的面積。（2 分）

17. Let p and q be positive integers such that $\frac{72}{487}<\frac{p}{q}<\frac{18}{121}$. Find the smallest possible value of q. (2 marks)

設 p、q 爲滿足 $\frac{72}{487}<\frac{p}{q}<\frac{18}{121}$ 的正整數。求 q 的最小可能值。（2 分）

18. In ΔABC, $AB = 13$, $BC = 14$ and $CA = 15$. P is a point inside ΔABC such that $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA$. Find $\tan \angle PAB$. (2 marks)

在 ΔABC 中，$AB = 13$、$BC = 14$、$CA = 15$。P 是 ΔABC 內的一點，使得 $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA$。求 $\tan \angle PAB$。（2 分）

19. If $\sqrt{9-8\sin 50^\circ}=a+b\csc 50^\circ$ where a, b are integers, find ab. (2 marks)

若 $\sqrt{9-8\sin 50^\circ}=a+b\csc 50^\circ$，其中 a、b 爲整數，求 ab。（2 分）

20. When $(1+x)^{38}$ is expanded in ascending powers of x, N_1 of the coefficients leave a remainder of 1 when divided by 3, while N_2 of the coefficients leave a remainder of 2 when divided by 3. Find N_1-N_2. (2 marks)

當 $(1+x)^{38}$ 按 x 的升冪序展開時，其中 N_1 個系數除以 3 時餘 1、N_2 個系數除以 3 時餘 2。求 N_1-N_2。（2 分）

End of Paper

全卷完