International Mathematical Olympiad
Preliminary Selection Contest — Hong Kong 2004

國際數學奧林匹克
2004 香港選拔賽

6th June, 2004
2004 年 6 月 6 日

Time allowed: 3 hours
時限：3 小時

Instructions to Candidates:
考生須知：

1. Answer ALL questions.
   本卷各題全答。

2. Put your answers on the answer sheet.
   請將答案寫在答題紙上。

3. The use of calculators is NOT allowed.
   不可使用計算機。

1. Let $ABCDEFGH$ be a rectangular cuboid. How many acute-angled triangles are formed by joining any three vertices of the cuboid? (1 mark)

設 $ABCDEFGH$ 為長方體。若把任意三個頂點連起，可組成多少個銳角三角形？ （1 分）

2. A collector has N precious stones. If he takes away the three heaviest stones then the total weight of the stones decreases by 35%. From the remaining stones if he takes away the three lightest stones the total weight further decreases by $\frac{5}{13}$. Find N. (1 mark)

一名收藏家擁有 N 塊寶石。若他拿走最重的三塊寶石，那麼寶石的總重量會減少 35%。若他從餘下的寶石中再拿走最輕的三塊，那麼寶石的總重量會再減少 $\frac{5}{13}$。求 N。 （1 分）

3. Denote by $[a]$ the greatest integer less than or equal to a. Let N be an integer, x and y be numbers satisfying the simultaneous equations $\begin{cases}[x]+2y=N+2\\ [y]+2x=3-N\end{cases}$. Find x in terms of N. (1 mark)

我們把小於或等於 a 的最大整數記作$[a]$。設 N 為整數，且 x 和 y 滿足聯立方程 $\begin{cases}[x]+2y=N+2\\ [y]+2x=3-N\end{cases}$。求 x，答案以 N 表示。 （1 分）

4. A *palindrome* is a positive integer which is the same when reading from the right hand side or from the left hand side, e.g. 2002. Find the largest five-digit palindrome which is divisible by 101. (1 mark)

若某正整數不論從左面或右面讀起皆相同（例如：2002），則該數稱為「回文數」。求可被 101 整除的最大五位回文數。 （1 分）

5. Evaluate $\frac{3}{1!+2!+3!}+\frac{4}{2!+3!+4!}+\cdots+\frac{2004}{2002!+2003!+2004!}$. (1 mark)

求 $\frac{3}{1!+2!+3!}+\frac{4}{2!+3!+4!}+\cdots+\frac{2004}{2002!+2003!+2004!}$ 的值。 （1 分）

6. If $\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=\frac{2004}{2005}$, find $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}$. (1 mark)

若 $\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=\frac{2004}{2005}$，求 $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}$。 （1 分）

7. Let D be a point inside triangle ΔABC such that $AB=DC$, $\angle DCA=24^\circ$, $\angle DAC=31^\circ$ and $\angle ABC=55^\circ$. Find $\angle DAB$. (1 mark)

設 D 為 ΔABC 內的一點，使得 $AB=DC$，$\angle DCA=24^\circ$，$\angle DAC=31^\circ$，且 $\angle ABC=55^\circ$。求 $\angle DAB$。 （1 分）

8. It is known that 999973 has exactly three distinct prime factors. Find the sum of these prime factors. (1 mark)
已知 999973 剛好有三個不同的質因數。求這些質因數之和。 （1 分）

9. A person picks n different prime numbers less than 150 and finds that they form an arithmetic sequence. What is the greatest possible value of n? (1 mark)
某人選取了 n 個不同的質數，每個均小於 150。他發現這些質數組成一個等差數列。求 n 的最大可能值。 （1 分）

10. Given a positive integer n, let $p(n)$ be the product of the non-zero digits of n. For example, $p(7)=7$, $p(204)=2\times4=8$, etc. Let $S=p(1)+p(2)+\cdots+p(999)$. What is the largest prime factor of S? (1 mark)
對於正整數 n，設 $p(n)$ 為 n 的所有非零數字之積。
例如：$p(7)=7$、$p(204)=2\times4=8$ 等。
設 $S=p(1)+p(2)+\cdots+p(999)$。那麼，$S$ 最大的質因數是甚麼？ （1 分）

11. If $\begin{cases} A=\dfrac{1}{1\times2}+\dfrac{1}{3\times4}+\cdots+\dfrac{1}{2003\times2004} \\ B=\dfrac{1}{1003\times2004}+\dfrac{1}{1004\times2003}+\cdots+\dfrac{1}{2004\times1003} \end{cases}$, find $\dfrac{A}{B}$. (1 mark)

若 $\begin{cases} A=\dfrac{1}{1\times2}+\dfrac{1}{3\times4}+\cdots+\dfrac{1}{2003\times2004} \\ B=\dfrac{1}{1003\times2004}+\dfrac{1}{1004\times2003}+\cdots+\dfrac{1}{2004\times1003} \end{cases}$，求 $\dfrac{A}{B}$。 （1 分）

12. Find the number of 6-digit positive integers $\overline{abcdef}$ satisfying the following two conditions:
(a) Each digit is non-zero.
(b) $a\times b+c\times d+e\times f$ is even. (1 mark)
求符合以下兩個條件的六位正整數 $\overline{abcdef}$ 的數目：
(a) 每位數字皆不等於零。
(b) $a\times b+c\times d+e\times f$ 是偶數。 （1 分）

13. Find the area enclosed by the graph $x^2+y^2=|x|+|y|$ on the xy-plane. (2 marks)
求 xy 坐標平面上由圖像 $x^2+y^2=|x|+|y|$ 所圍出的面積。 （2 分）

14. Determine the number of ordered pairs of integers (m,n) for which $mn\geq0$ and $m^3+n^3+99mn=33^3$. (2 marks)
求滿足 $mn\geq0$ 及 $m^3+n^3+99mn=33^3$ 的整數序偶 (m,n) 的數目。 （2 分）

15. A natural number n is said to be *lucky* if 2^{-n} and 2^{-n-1} have the same number of significant figures when written in decimal notation. For example, 3 is lucky since $2^{-3}=0.125$ and $2^{-4}=0.0625$ have the same number of significant figures. On the other hand $2^{-5}=0.03125$ has one more significant figure than 0.0625, so 4 is not lucky. Given that $\log 2=0.301$ (correct to 3 significant figures), how many lucky numbers are less than 2004? (2 marks)

對於自然數 n，若 2^{-n} 和 2^{-n-1} 兩數以十進制表示時有效數字的數目相同，則 n 稱為「幸運數」。例如：$2^{-3}=0.125$ 和 $2^{-4}=0.0625$ 兩數中有效數字的數目相同，因此 3 是幸運數。另一方面，由於 $2^{-5}=0.03125$ 比 0.0625 多了一個有效數字，所以 4 不是幸運數。已知 $\log 2=0.301$（準確至 3 位有效數字），問有多少個幸運數小於 2004？ （2 分）

16. A positive integer n is said to be *good* if $3n$ is a re-ordering of the digits of n when they are expressed in decimal notation. Find a four-digit good integer which is divisible by 11. (2 marks)

對於正整數 n，若在十進制表示中，整數 $3n$ 可從 n 的數字經重新排列而得出，則 n 稱為「好數」。求一個可被 11 整除的四位好數。 （2 分）

17. From any n-digit ($n>1$) number a, we can obtain a $2n$-digit number b by writing two copies of a one after the other. If $\frac{b}{a^2}$ is an integer, find the value of this integer. (2 marks)

對於任意 n 位數 a（其中 $n>1$），把 a 連寫兩次可得到一個 $2n$ 位數 b。若 $\frac{b}{a^2}$ 為整數，求此整數的值。 （2 分）

18. Find the sum of all x such that $0\le x\le 360$ and $\cos 12x^\circ=5\sin 3x^\circ+9\tan^2 x^\circ+\cot^2 x^\circ$. (2 marks)

求所有滿足 $0\le x\le 360$ 及 $\cos 12x^\circ=5\sin 3x^\circ+9\tan^2 x^\circ+\cot^2 x^\circ$ 的 x 值之和。 （2 分）

19. ABC and GBD are straight lines. E is a point on CD produced, and AD meets EG at F. If $\angle CAD=\angle EGD$, $EF=FG$, $AB:BC=1:2$ and $CD:DE=3:2$, find $BD:DF$. (3 marks)

ABC 和 GBD 均為直線，E 是 CD 延線上的一點，且 AD 交 EG 於 F。若 $\angle CAD=\angle EGD$，$EF=FG$，$AB:BC=1:2$，且 $CD:DE=3:2$，求 $BD:DF$。 （3 分）

20. For any positive integer n, let $f(n)$ denote the index of the highest power of 2 which divides $n!$, e.g. $f(10)=8$ since $10!=2^8\times 3^4\times 5^2\times 7$. Find the value of $f(1)+f(2)+\cdots+f(1023)$. (3 marks)

對於任何正整數 n，設 $f(n)$ 為可整除 $n!$ 的 2 的最高乘冪的指數。例如：因為 $10!=2^8\times 3^4\times 5^2\times 7$，所以 $f(10)=8$。求 $f(1)+f(2)+\cdots+f(1023)$ 的值。 （3 分）

End of Paper

全卷完